第８講　２次関数(4)

例題８－１

すべての実数 x について $x^2-(k-1)x+3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 8 － 1

次の 2 次不等式がすべての実数 x で成り立つように定数 a の範囲を定めよ.

(1)　$x^2+ax+3>0$　　(2)　$-x^2+2ax-a-2\leqq 0$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題８－２

2 次方程式 $x^2-x+a=0$，$x^2+2ax-3a+4=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ．

⑴　両方とも実数解をもつ　　⑵　一方のみが実数解をもつ

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題８－２

２つの２次方程式 $x^2+(a+1)x-1+a^2=0$ と $x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ．

(1)　ともに実数解をもつ　　(2)　少なくとも一方が実数解をもつ

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題８－３

２次方程式 $2x^2-3x-a=0$　が次の条件を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ.

(1)　正の解と負の解をもつ.

(2)　$0<x<1$，$1<x<2$ の範囲でそれぞれ１つの実数解をもつ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題８－３

2 次方程式 $x^2-mx+m+3=0$ が次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(1)　$x<-2$，$-2<x$　の範囲に解を 1 つずつもつ．

(2)　$-4<x<-2$，$0<x<2$　の範囲に解を 1 つずつもつ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題８－４

2 次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題８－４

2 次方程式 $x^2+2ax+2a+3=0$ が 2 より小さい異なる 2 つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　2次関数(4)

(1)　2次不等式 $x^2-ax-2a>0$ がすべての実数 x で成り立つような定数 a の範囲は

　　[アイ] $<a<$ [ウ]

(2)　2次方程式 $x^2+2(m-1)x+3-m=0$ が次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲をそれぞれ求めよ．

　(i)　正の解と負の解を1つずつもつ．　$m>$ [エ]

　(ii)　1より小さい異なる2つの解をもつ．　$m>$ [オ]

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　2次関数(4)

例題8－1
すべての実数 x について $x^2-(k-1)x+3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

x^2 の係数は正
$D=(k-1)^2-4\cdot1\cdot3=k^2-2k-11$　とおくと
すべての実数 x について　$x^2-(k-1)x+3>0$　が成り立つための条件は　$D<0$
よって　$k^2-2k-11<0$　より　$\boldsymbol{1-2\sqrt{3}<k<1+2\sqrt{3}}$

類題8－1
次の2次不等式がすべての実数 x で成り立つように定数 a の範囲を定めよ.
(1)　$x^2+ax+3>0$　　(2)　$-x^2+2ax-a-2\leqq0$

(1)　x^2 の係数は正
$D=a^2-4\cdot1\cdot3=a^2-12$　とおくと
すべての実数 x について　$x^2+ax+3>0$　が成り立つための条件は　$D<0$
よって　$a^2-12<0$　より　$\boldsymbol{-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}}$
(2)　$-x^2+2ax-a-2\leqq0$　より　$x^2-2ax+a+2\geqq0$
$D=4a^2-4\cdot1\cdot(a+2)=4a^2-4a-8$　とおくと
すべての実数 x について　$-x^2+2ax-a-2\leqq0$　が成り立つための条件は　$D\leqq0$
よって　$4a^2-4a-8\leqq0$　より　$a^2-a-2\leqq0$　　$(a-2)(a+1)\leqq0$
したがって　$\boldsymbol{-1\leqq a\leqq2}$

例題8－2
2次方程式 $x^2-x+a=0$, $x^2+2ax-3a+4=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ.
(1)　両方とも実数解をもつ　　(2)　一方のみが実数解をもつ

$x^2-x+a=0$　……①　　$x^2+2ax-3a+4=0$　……②　について，①，②の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると
$D_1=1-4a$
$D_2=4a^2-4\cdot1\cdot(-3a+4)=4a^2+12a-16$
①が実数解をもつのは
$D_1\geqq0$　より　$1-4a\geqq0$　　$a\leqq\dfrac{1}{4}$　……①′
②が実数解をもつのは
$D_2\geqq0$　より　$a^2+3a-4\geqq0$　　$(a+4)(a-1)\geqq0$　　$a\leqq-4,\ 1\leqq a$　……②′

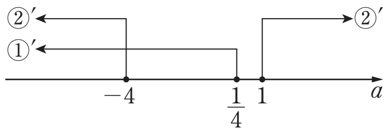
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　①，②の両方とも実数解をもつのは，

$D_1 \geqq 0$　かつ　$D_2 \geqq 0$　のときである．

①′ かつ ②′ より　$\boldsymbol{a \leqq -4}$



(2)　①，②の一方のみが実数解をもつのは，

$D_1 \geqq 0$，$D_2 \geqq 0$ のいずれか一方のみ成り立つときである．

よって ①′，②′ のいずれか一方のみ成り立つ範囲を求めて　$\boldsymbol{-4 < a \leqq \frac{1}{4},\ 1 \leqq a}$

類題8－2

2つの2次方程式 $x^2+(a+1)x-1+a^2=0$ と $x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ．

(1)　ともに実数解をもつ　　(2)　少なくとも一方が実数解をもつ

$x^2+(a+1)x-1+a^2=0$　……①　　$x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$　……②　について，①，②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$D_1=(a+1)^2-4\cdot 1\cdot(-1+a^2)=-3a^2+2a+5$

$D_2=(1-a)^2-4\cdot 1\cdot(a+1)^2=-3a^2-10a-3$

①が実数解をもつのは　$D_1 \geqq 0$　より

$-3a^2+2a+5 \geqq 0$　　$3a^2-2a-5 \leqq 0$　　$(3a-5)(a+1) \leqq 0$

よって　$-1 \leqq a \leqq \frac{5}{3}$　……①′

②が実数解をもつのは　$D_2 \geqq 0$　より

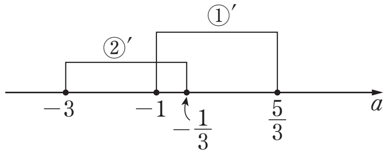
$-3a^2-10a-3 \geqq 0$　　$3a^2+10a+3 \leqq 0$　　$(3a+1)(a+3) \leqq 0$

よって　$-3 \leqq a \leqq -\frac{1}{3}$　……②′

(1)　①，②がともに実数解をもつのは

$D_1 \geqq 0$　かつ　$D_2 \geqq 0$　のときである．

①′ かつ ②′ より　$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq -\frac{1}{3}}$



(2)　①，②の少なくとも一方が実数解をもつのは

$D_1 \geqq 0$，または　$D_2 \geqq 0$　のときである．

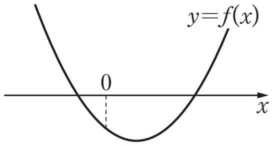
①′ または ②′ より　$\boldsymbol{-3 \leqq a \leqq \frac{5}{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

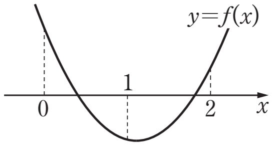
例題８－３
2 次方程式 $2x^2-3x-a=0$　が次の条件を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ.
(1)　正の解と負の解をもつ.
(2)　$0<x<1$，$1<x<2$ の範囲でそれぞれ１つの実数解をもつ.

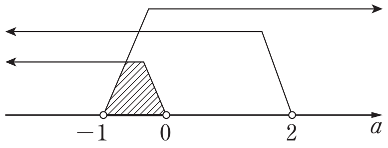
$f(x)=2x^2-3x-a$ とおき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標を考える.

(1)　$y=f(x)$ が $x>0$，$x<0$ のそれぞれで
x 軸と共有点をもてばよい.
よって　$f(0)<0$　より　$-a<0$
したがって　$\boldsymbol{a>0}$



(2)　$y=f(x)$ が $0<x<1$，$1<x<2$ のそれぞれで
x 軸と共有点をもてばよい.
よって　$f(0)>0$，$f(1)<0$，$f(2)>0$
$f(0)>0$　より　$a<0$
$f(1)<0$　より　$2-3-a<0$　　$a>-1$
$f(2)>0$　より　$8-6-a>0$　　$a<2$
これらの共通部分より　$\boldsymbol{-1<a<0}$



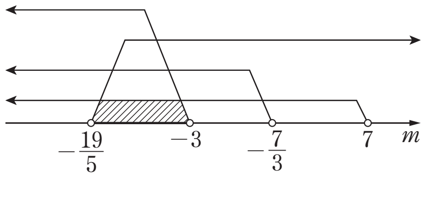


類題８－３
2 次方程式 $x^2-mx+m+3=0$ が次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ.
(1)　$x<-2$，$-2<x$　の範囲に解を１つずつもつ.
(2)　$-4<x<-2$，$0<x<2$　の範囲に解を１つずつもつ.

$f(x)=x^2-mx+m+3$ とおき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標を考える.

(1)　$f(-2)<0$ であればよい.
よって $4+2m+m+3<0$　より　$\boldsymbol{m<-\frac{7}{3}}$

(2)　$f(-4)>0$，$f(-2)<0$，$f(0)<0$，$f(2)>0$ であればよい.
$f(-4)>0$　より　$16+4m+m+3>0$　　$m>-\frac{19}{5}$
$f(-2)<0$　より　$m<-\frac{7}{3}$
$f(0)<0$　より　$m+3<0$　　$m<-3$
$f(2)>0$　より　$4-2m+m+3>0$　　$m<7$
これらの共通部分より　$\boldsymbol{-\frac{19}{5}<m<-3}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題８－４

2 次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

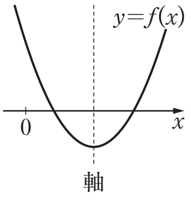
$f(x)=x^2+2(a-2)x+a$ とおく．

$f(x)=\{x+(a-2)\}^2-a^2+5a-4$　より　軸は　$x=-a+2$

また，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=\{2(a-2)\}^2-4\cdot 1\cdot a=4a^2-20a+16$

放物線 $y=f(x)$ と x 軸の $x>0$ の部分が異なる 2 点で交わるときを考える．それは



$f(0)>0$　……①　　$(f(x)$ の軸$)>0$　……②　　$D>0$　……③

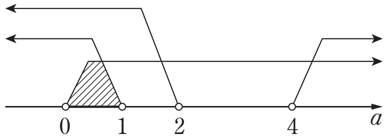
において　①，②，③が同時に成り立つときである．

①より　$a>0$

②より　$-a+2>0$　　$a<2$

③より　$a^2-5a+4>0$　　$(a-1)(a-4)>0$

よって　$a<1,\ 4<a$



これらの共通部分より　$\boldsymbol{0<a<1}$

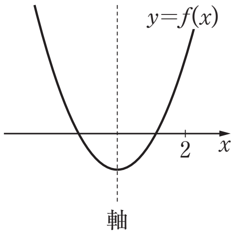
類題８－４

2 次方程式 $x^2+2ax+2a+3=0$ が 2 より小さい異なる 2 つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

$f(x)=x^2+2ax+2a+3$ とおく．

$f(x)=(x+a)^2-a^2+2a+3$　より　軸は　$x=-a$

放物線 $y=f(x)$ と x 軸の $x<2$ の部分が異なる 2 点で交わるときを考える．それは



$f(2)>0$　……①　　$(f(x)$ の軸$)<2$　……②　　$D>0$　……③

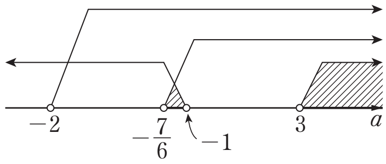
において①，②，③が同時に成り立つときである．

①より　$6a+7>0$　　$a>-\dfrac{7}{6}$

②より　$-a<2$　　$a>-2$

③より　$4a^2-4\cdot 1\cdot(2a+3)>0$　　$a^2-2a-3>0$

$(a+1)(a-3)>0$　　よって　$a<-1,\ 3<a$



これらの共通部分より　$\boldsymbol{-\dfrac{7}{6}<a<-1,\ 3<a}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　２次関数(4)

(1)　２次不等式 $x^2-ax-2a>0$ がすべての実数 x で成り立つような定数 a の範囲は

　　［アイ］$<a<$［ウ］

(2)　２次方程式 $x^2+2(m-1)x+3-m=0$ が次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲をそれぞれ求めよ．

　(i)　正の解と負の解を１つずつもつ．　　　$m>$［エ］

　(ii)　１より小さい異なる２つの解をもつ．　　$m>$［オ］

解答例

(1)　x^2 の係数は正．判別式を D とおくと，

$D=a^2-4\cdot1\cdot(-2a)=a^2+8a$

すべての実数 x で $x^2-ax-2a>0$ が成り立つための条件は　$D<0$

よって　$D=a^2+8a=a(a+8)<0$　より　$\boldsymbol{-8<a<0}$

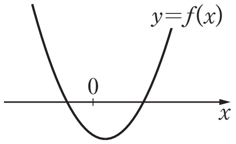
(2)　$f(x)=x^2+2(m-1)x+3-m$　とおく．

$f(x)=(x+m-1)^2-m^2+m+2$　より　軸は $x=1-m$

(i)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x<0$，$0<x$ の部分とそれぞれ共有点をもてばよい．それは

　$f(0)<0$

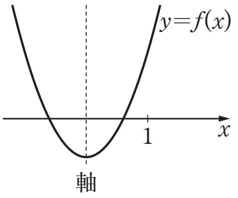
つまり　$3-m<0$　より　$\boldsymbol{m>3}$　のときである．



(ii)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x<1$ の部分と異なる２つの共有点をもてばよい．それは次の①，②，③が同時に成り立つときである．

　$f(1)>0$　……①　　$(f(x)$ の軸$)<1$　……②

　判別式 $D>0$　……③



①より　$1+2(m-1)+3-m>0$

$$m>-2$$

②より　$1-m<1$

$$m>0$$

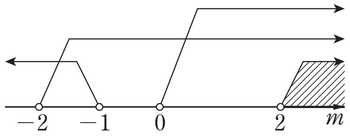
③より　$\{2(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot(3-m)>0$

$$m^2-m-2>0$$

$$(m+1)(m-2)>0$$

よって　$m<-1$，$2<m$

①，②，③の共通部分より　$\boldsymbol{m>2}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。